SOBRE LA ECUACION

$x^4+y^4=z^4$

La ecuacion propuesta representa un caso especial del teorema de Fermat. Hai que demostrar, pues, que no existen números enteros x, y, z, capaces de llenar la ecuacion $x^4+y^4=z^4$.

Ya Euler (*), en el año 1738, ha demostrado que ni x^4+y^4 ni x^4-y^4 puede ser igual a un cuadrado ni, por eso, igual a una cuarta potencia. Daremos, en seguida, aquí dos demostraciones nuevas del teorema en cuestion, demostrando directamente que la ecuacion $x^4+y^4=z^4$ no tiene solucion en números enteros.

I

La primera demostracion se funda, principalmente, en ecuaciones que sirven de condicion para la existencia de números pitagóricos, es decir, de números enteros que satisfacen a la ecuacion

$$x^2+y^2=z^2$$

Desarrollemos, primero, estas condiciones.

(*) *Commentationes arithmeticae collectae*, I, páj. 24.

Para este fin pongamos

$$z^2 - y^2 = x^2 \tag{1}$$

recordando que, como en el caso jeneral, se pueden considerar x, y, z, como números enteros, positivos i sin divisor comun. Notamos, ademas, que de los tres números x, y, z, solo uno puede ser par i necesita serlo. En verdad, si fueran dos de los tres números pares, ellos tendrian el número 2 como factor comun, i los tres números no pueden ser impares a la vez, puesto que la diferencia $(z^2 - y^2)$ de dos números impares da un número par. Ahora bien, si fuera z un número par, o sea $z \equiv 0 \bmod 2$, $y\ x \equiv y \equiv 1 \bmod 2$ i, por consiguiente, $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \bmod 4$, resultaria para z^2 segun (1)

$$z^2 \equiv x^2 + y^2 \equiv 2 \bmod 4$$

lo que no es posible, puesto que el cuadrado (z^2) de un número par (z) tiene que ser divisible por 4, o sea $z^2 \equiv 0 \bmod 4$. Resulta de aquí que z no puede ser número par. Elijamos de los números x e y el último como número par, así que tenemos

$$x \equiv 1, y \equiv 0, z \equiv 1 \bmod 2 \tag{2}$$

Escribiendo la ecuacion (1) en la forma

$$(z-y)(z+y) = x^2$$

se demuestra facilmente que $z+y$ i $z-y$ no pueden tener divisor comun alguno. En efecto, si ponemos

$$z+y = k\,\alpha$$

$$z-y = k\,\beta$$

resulta

$$z = k\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$y = k\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Se observa, pues, que z e y tienen el mismo divisor comun k lo que no puede ser segun páj. 308. Este divisor k desaparece en el caso $k=2$, pero no tiene lugar este caso, por ser $z+y$ como $z-y$ números impares segun (2). Se desprende de aquí que $k=1$, o que $z+y$ i $z-y$ no tienen divisor comun alguno.

Espuesto esto, es evidente que $z+y$, como $z-y$ deben ser números cuadrados. Como $z+y > z-y$, podemos sentar

$$\left.\begin{aligned} z-y&=g^2\\ z+y&=(g+\sigma)^2,\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

designando por g i σ números enteros i positivos.

Sin dificultad, se deducen de las ecuaciones (3) los siguientes valores:

$$z=\frac{(g+\sigma)_2+g^2}{2}$$

$$y=\frac{(g+\sigma)^2-g^2}{2}$$

i, tomando en cuenta que $x^2=z^2-y^2$, en fin

$$x=g\,(g+\sigma)$$

Para que sean z e y números enteros, es preciso considerar σ como número par. Haciendo $\sigma=2\,l$, encontramos las condiciones con las cuales deben cumplir los números x, y, z, en las formas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} z&=(g+l)^2+l^2\\ y&=2\,l\,(g+l)\\ x&=(g+l)^2-l^2,\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

formas en las que g es un número entero, positivo e impar [segun (3)] i l un número entero i positivo que puede ser par o impar (*).

(*) Estas condiciones toman las formas, ordinariamente citadas,

$$z=p^2+q^2,\ y=2p\,q,\ x=p^2-q^2$$

por medio de las meras sustituciones $g+l=p$, $l=q$.

Procederemos, ahora, a la consideracion de la ecuacion $x^4 + y^4 = z^4$ que apuntaremos en la forma

$$z^4 - y^4 = x^4 \tag{4}$$

En esta ecuacion significan x, y z números enteros, positivos i sin divisor comun. Ademas suponemos, segun las razones espuestas en la páj. 308, $z \equiv x \equiv 1$ e $y \equiv 0$ mod 2.

Como se puede apuntar la ecuacion (4) del modo siguiente:

$$(z^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2)^2. \tag{5}$$

es posible considerar x^2, y^2, z^2 como números pitagóricos. Tales números deben llenar las condiciones (A), de suerte que es permitido poner

$$z^2 = (g+l)^2 + l^2;\; y^2 = 2\,l\,(g+l);\; x^2 = (g+l)^2 - l^2 \tag{6}$$

Ya sabemos que g es número impar. Deducimos fácilmente que l debe ser un número divisible por 8. En efecto tenemos, primero, $x^2 \equiv 1$ mod 8 como cuadrado de un número impar, i, por eso, $l \equiv 0$ mod 4, en seguida, desprendemos de $y^2 = 2\,l\,(g+l)$ que $l \equiv 0$ mod 8.

Ahora bien, si consideramos la primera de las ecuaciones (6) la que podemos escribir de este modo

$$z^2 - l^2 = (g+l)^2$$

vemos que z, l, $g+l$ son números pitagóricos que, segun (A), tienen que cumplir con ciertas condiciones, a saber

$$z = (p+q)^2 + q^2;\; l = 2\,q\,(p+q);\; g+l = (p+q)^2 - q^2 \tag{7}$$

Aquí significan p i q números enteros i positivos, ademas es $p \equiv 1$ mod 2 i $q \equiv 0$ mod 4, puesto que l debe ser divisible por 8.

La comparacion de las ecuaciones (6) i (7) da para y^2 la espresion siguiente:

$$y^2 = 4\,(p+q)\,q\,\left\{(p+q)^2 - q^2\right\} = 4\,p\,q\,(p+q)\,(p+2\,q) \tag{8}$$

Analizando esta ecuacion, observamos primeramente que p i q no pueden tener divisor comun, porque, si tuvieran p i q el mismo divisor, éste estaria contenido tambien, segun (7), en g i l, i, por eso, segun (6), en x, y, z lo que hemos escluido de antemano.

Ahora bien, si p i q no tienen divisor comun, no lo pueden tener ni $p+q$ ni $p+2q$ tampoco. Supongamos, por ejemplo,

$$p+q=k\alpha$$
$$p+2q=k\beta,$$

resultará

$$q=k(\beta-\alpha)$$
$$p=k(2\alpha-\beta),$$

o p i q tendrán el mismo divisor k.

No teniendo ahora p, q, $p+q$, $p+2q$ divisor comun i siendo 4 un cuadrado, debe ser número cuadrado cada uno de los números

$$p,\ q,\ p+q,\ p+2q,$$

segun (8).

Se trata de demostrar que los cuatro números mencionados no pueden ser cuadrados a la vez.

Supongamos

$$p+q=a^2,$$

ecuacion en que a es número impar, por ser p impar i q par.

Como $p+2q=a^2+q$ i $p=a^2-q$ deben ser números cuadrados, se nos ofrece un medio de espresar q por dos séries diferentes:

1.° a^2+q será un término de la série

$$a^2,\ (a+1)^2,\ (a+2)^2,\ldots$$

que consta de a^2 i de los cuadrados siguientes. Luego q es igual a la suma de las diferencias entre 2 términos sucesivos, a saber:

$$q=(2a+1)+(2a+3)+(2a+5)+\cdots \tag{9}$$

2.° a^2-q será un término de la série

$$a^2, (a-1)^2, (a-2)^2, \ldots$$

que consta de a^2 i de los cuadrados, menores que a^2. De aquí resulta para q el valor

$$q=(2a-1)+(2a-3)+(2a-5)+\cdots \tag{10}$$

Pongamos ahora, en lugar de las séries indeterminadas, segun (9),

$$q=(2a+1)+(2a+3)+\cdots\cdots+(2a+b) \tag{11}$$

Será, segun esta ecuacion, q el término sumatorio de una progresion por diferencia de $\frac{b+1}{2}$ términos. Averiguando este término sumatorio, encontramos

$$q=\frac{b+1}{4}(4a+b+1) \tag{12}$$

De aquí resulta que, por ser $q\equiv 0 \bmod 4$, segun páj. 310, será

$$b+1\equiv 0 \bmod 4 \tag{13}$$

Ahora es claro que, para espresar q por la série (10) que tambien es una progresion por diferencia, se necesitan mas que $\frac{b+1}{2}$ términos, puesto que estos son menores que los correspondientes de la série (9).

En fin podemos sentar

$$\left.\begin{aligned} q=(2a-1)+(2a-3)+\cdots\cdots+(2a-b)+[2a-(b+2)]+\\ +[2a-(b+4)]+\cdots\cdots+[2a-(b+2c)] \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Restando (14) de (11), término por término, resulta una relacion entre a, b i c, a saber

$$2+6+10+\cdots\cdots+2b=[2a-(b+2)]+[2a-(b+4)]+\cdots\cdots+ \\ +[2a-(b+2c)]$$

o bien

$$\frac{(b+1)^2}{2}=c\,(2\,a-b-c-1) \tag{15}$$

Esta ecuacion la podemos trasformar del modo siguiente:

Introduciendo, en primer lugar, $b+1=4\,\beta$ lo que es permitido, segun (13), se convierte (15) en

$$8\,\beta^2=c\,(2\,a-4\,\beta-c).$$

De ahí se desprende, en segundo lugar, que c debe ser número par. Sea $c=2\,\gamma$, será

$$4\,\beta^2=2\,\gamma\,(a-2\,\beta-\gamma)$$

o bien

$$(2\,\beta+\gamma)^2=2\,a\,\gamma-\gamma^2=a^2-(a-\gamma)^2 \tag{16}$$

Hai que recordar que a es $\equiv 1$ mod 2, miéntras que γ puede ser o $\equiv 0$ o $\equiv 1$ mod 2.

Deducimos de la ecuacion (16) que los números

$$a,\ a-\gamma,\ 2\,\beta+\gamma$$

tienen que ser números pitagóricos, lo que trae por consecuencia que estos números deben tener lás formas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} a&=(p_1+q_1)^2+q_1^2\\ a-\gamma&=2\,q_1\,(p_1+q_1)\\ 2\,\beta+\gamma&=(p_1+q_1)^2-q_1^2 \end{aligned}\right\}\tag{17}$$

Ahora bien, si recordamos el valor de q, segun (12), que, por medio de la sustitucion $b+1=4\,\beta$ toma la forma

$$q=4\,\beta\,(a+\beta)$$

podemos espresar q por p_1 i q_1.

En efecto, tenemos sucesivamente, segun (17),

$$\alpha+2\beta=p_1^2+4p_1q_1+2q_1^2$$

$$\beta=p_1q_1$$

$$\alpha+\beta=p_1^2+3p_1q_1+2q_1^2$$

i, por lo tanto,

$$q=4p_1q_1(p_1^2+3p_1q_1+2q_1^2)=4p_1q_1(p_1+q_1)(p_1+2q_1)\ (18)$$

El número q que, segun páj. 310, debe ser número cuadrado, aparece, pues, en la misma forma que y^2, en la ecuacion (8).

Como en la ecuacion (8), se concluye aquí que los números $p_1, q_1, p_1+q_1, p_1+2q_1$ no pueden tener divisor comun i que, por eso, cada uno de estos números tiene que ser cuadrado.

Si aplicamos, en seguida, a los números p_1, q_1, p_1+q_1, p_1+ $+2q_1$ el mismo razonamiento que mas arriba hemos aplicado a $p, q, p+q, p+2q$, resultarán otras i otras ecuaciones, correspondientes a las (18), las que podemos poner de esta manera:

$$q_1=4p_2q_2(p_2+q_2)(p_2+2q_2)$$

$$q_2=4p_3q_3(p_3+q_3)(p_3+2q_3)$$

etc. in infinitum.

De este sistema de ecuaciones se desprende que $q>q_1>$ $>q_2>$...... i que cada uno de los números q es entero, positivo i cuadrado. Luego deberia de existir una série infinita de números enteros i positivos que fueran menores que un número finito q lo que es un absurdo. Podria decirse, talvez, que se llegará a un número $q_m=0$. Esto llevaria como consecuencia que todos los q fueran $=0$ i que, por lo tanto,

$$z=p^2,\ l=0,\ g+l=p^2$$

e

$$y^2=0,\ x^2=p^4$$

En fin se nos presentaria la ecuacion (4) en la forma

$$p^8=p^8$$

es decir, en forma de una identidad.

Luego no existen valores de x, y, z, susceptibles de satisfacer a la ecuacion

$$z^4-y^4=x^4$$

Observacion.—En las ecuaciones (17) hemos elejido $a-\gamma$ como número par, lo que no es necesario, puesto que las ecuaciones

$$a=(p_1+q_1)^2+q_1{}^2$$

$$2\beta+\gamma=2q_1(p_1+q_1)$$

$$a-\gamma=(p_1+q_1)^2-q_1{}^2$$

Conducen al mismo valor

$$q=4p_1q_1(p_1+q_1)(p_1+2q_1)$$

II

Daremos, en seguida, otra demostracion del mismo teorema que parte de una simple descomposicion de los números. En cuanto a los números x, y, z conservaremos las mismas suposiciones, establecidas en I.

En lugar de la ecuacion (4), escribimos

$$z^4-x^4=y^4 \tag{19}$$

recordando que $y\equiv 0$ mod 2.

Descomponiendo el primer miembro de (19) en sus factores, podemos considerar

$$(z+x)(z-x)(z^2+x^2)=y^4 \tag{20}$$

Como z i x son números impares, $z+x$, $z-x$, z^2+x^2 serán números pares. Si uno de los números $z+x$ o $z-x$ es divisible por 2 i por ninguna potencia mayor de 2, $z-x$ o $z+x$ deben ser divisibles por $4=2^2$ o por otra potencia mayor de 2.

Sea, por ejemplo,

$$z\equiv\pm 1,\ x\equiv\mp 1 \mod 4,$$

serán

$$z-x\equiv 2 \text{ i } z+x\equiv 0 \mod 4$$

o bien, $z-x$ es solamente divisible por 2, miéntras que $z+x$ es divisible, a lo ménos, por $2^2=4$.

Por otra parte, si

$$z\equiv x\equiv\pm 1 \mod 4,$$

serán

$$z-x\equiv 0 \text{ i } z+x\equiv 2 \mod 4$$

En todos los casos será, ademas, z^2+x^2 solo divisible por 2 i por ninguna potencia mayor de 2. Esto se entiende fácilmente recordando que el cuadrado de cualquier número impar deja el resíduo $+1$, dividiéndolo por 8.

En efecto, si elevamos

$$x=4\,m\pm 1$$

al cuadrado, resulta

$$x^2=16\,m^2\pm 8\,m+1\equiv +1 \mod 8$$

i, por eso,

$$z^2+x^2\equiv 2 \mod 8$$

o, con otros términos, z^2+x^2 es solo divisible por la primera potencia de 2.

Espuesto lo anterior, queda evidente que en todo caso los números $z+x$, $z-x$, z^2+x^2 tienen el divisor comun 2. Réstanos demostrar que estos números no pueden tener otro divisor comun.

Supongamos para $z+x$ i $z-x$ el divisor comun $2k$, de suerte que tenemos

$$z+x=2k\alpha$$
$$z-x=2k\beta$$

Obtendremos

$$z=k(\alpha+\beta),\ x=k(\alpha-\beta),$$

valores que darian a z i x el mismo divisor k lo que no es admisible segun nuestras suposiciones.

Consideremos, ahora, $z+x$ o $z-x$ provistos del mismo factor $2k'$ que z^2+x^2, así que

$$\left.\begin{array}{l} z\pm x=2k'\gamma \\ z^2+x^2=2k'\delta \end{array}\right\}\quad(21)$$

Elevando al cuadrado la primera de estas ecuaciones i restándola de la segunda, queda

$$\mp 2zx=2k'(\delta-2k'\gamma^2)$$

o bien

$$\pm zx=k'(\delta-2k'\gamma^2).$$

Seria, por lo tanto, k', o cualquier factor de k', un divisor o de z o de x lo que traeria por consecuencia, segun (21), que z i x tuvieran un mismo divisor comun.

Luego encontramos que los números $z+x$, $z-x$, z^2+x^2 no tienen, fuera de 2, ningun divisor comun.

Sabido esto, será preciso, para que sea el producto

$$(z+x)(z-x)(z^2+x^2)$$

igual a una cuarta potencia (y^4), que $z+x$ o $z-x$, pero solamente uno de estos números, sea divisible por una potencia tal del número 2 que, multiplicándola por $2.2=2^2$, dé como producto una cuarta potencia.

Para fijar la idea, consideremos $z+x$ divisible por 2^λ i, por eso, tanto $z-x$ como z^2+x^2 únicamente divisible por la primera potencia de 2. Ahora tendremos

$$2^\lambda . 2^2 = 2^{\lambda+2} = \text{cuarta potencia}$$

o bien

$$\lambda \equiv 2 \bmod 4.$$

Apartando de cada uno de los tres números $z+x, z-x, z^2+x^2$ la potencia de 2 correspondiente, deben quedar, todavía, cada vez, cuartas potencias, puesto que no existen, fuera de 2, otros divisores, comunes a dichos números.

Esto nos da un criterio para las formas que deben tener los tres números, especialmente podemos sentar

$$\left.\begin{aligned} z+x &= 2^\lambda f^4 \\ z-x &= 2\, h^4, \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

designando por f i h números enteros, impares i sin divisor comun.

Las ecuaciones (21) permiten averiguar los valores de z i x i, en fin, el de z^2+x^2, a saber

$$z = 2^{\lambda-1} f^4 + h^4$$

$$x = 2^{\lambda-1} f^4 - h^4$$

$$z^2+x^2 = 2\left(2^{2\lambda-2} f^8 + h^8\right)$$

Siendo ahora

$$y^4 = (z+x)\,(z-x)\,(z^2+x^2) = 2^{\lambda+2} f^4 h^4 \left(2^{2\lambda-2} f^8 + h^8\right) \quad (22)$$

se sigue que

$$2^{2\lambda-2} f^8 + h^8$$

tiene que ser igual a una cuarta potencia

Pongamos

$$d^4=2^{2\lambda-2}f^8+h^8$$

o bien

$$(d^2)^2=\left(2^{\lambda-1}f^4\right)^2+(h^4)^2$$

de lo que se desprende que d^2, $2^{\lambda-1}f^4$, h^4 tienen que ser números pitagóricos. Segun I, es permitido, pues, apuntar

$$\left.\begin{aligned} d^2&=(g+l)^2+l^2\\ 2^{\lambda-}f^4&=2\,l(g+l)\\ h^4&=(g+l)^2-l^2 \end{aligned}\right\}(23)$$

Como, segun las razones espuestas mas arriba, $h^4\equiv 1 \bmod 4$, será $l\equiv 0 \bmod 2$. Ademas se deduce de las ecuaciones (23) que g i l no deben tener divisor comun, porque, si fueran divisibles por el mismo número, lo serian tambien f i h i, por consiguiente, $z+x$ i $z-x$ lo que no se admite. Se entiende que g es número impar.

Considerando ahora

$$l(g+l)=2^{\lambda-2}f^4=\left(2^{\frac{\lambda-2}{4}}f\right)^4$$

resulta que l como $g+l$ debe ser cuarta potencia. Para el fin que perseguimos, basta considerar l i $g+l$ como cuadrados, de modo que podemos sentar

$$l=y_1^{\,2};\ g+l=z_1^{\,2}$$

Pongamos, ademas, x_1 en lugar de h. La ecuacion

$$h^4=(g+l)^2-l^2$$

se convierte en la siguiente

$$x_1^{\,4}=z_1^{\,4}-y_1^{\,1}$$

o bien, en

$$z_1^{\,4}-x_1^{\,4}=y_1^{\,4}$$

ecuacion que tiene la misma forma que la (19)

$$z^4 - x^4 = y^4$$

de que hemos partido, siendo $y_1 \equiv 0$ i $x_1 \equiv z_1 \equiv 1$ mod 2. Se nota, ademas, que x_1, y_1, z_1 pueden considerarse como números positivos.

Ahora, es claro que, si aplicamos el mismo procedimiento que acabamos de esplicar, a la ecuacion

$$z_1{}^4 - x_1{}^4 = y_1{}^4,$$

nos resultará, como consecuencia, otra ecuacion

$$z_2{}^4 - x_2{}^4 = y_2{}^4$$

i así in infinitum

Ahora bien, segun (23), tenemos $l < 2^{\lambda - 1} f^4$ i, por eso, segun (22), $l < y$ i, con mas razon,

$$y_1 < y$$

luego

$$y_2 < y_1$$

i así in infinitum.

Desprendemos de aquí que, para que existan números enteros, capaces de llenar la ecuacion

$$z^4 - x^4 = y^4$$

debe haber infinitos números enteros i positivos $y_1, y_2 \ldots\ldots$ que son menores que un número finito y lo que es un absurdo.

Luego no hai solucion de la ecuacion propuesta en números enteros.

Santiago de Chile, Abril 14 de 1893.

DR. A. TAFELMACHER
Profesor de Matemáticas del Instituto Pedagójico