# El teorema de Hadamard en el caso de los determinantes reales

Por el doctor Carlos Grandjot R.,

Profesor de las Universidades de Chile y Católica.

Al matemático francés Hadamard debemos (Bulletin des sciences mathématiques 1893) un interesante teorema sobre determinantes en que de una cota para los términos de un determinante, se deduce una cota (no trivial) para el determinante mismo. El teorema—que halla su aplicación más importante en la teoría de las ecuaciones integrales—puede enunciarse como sigue: Cuando los módulos de todos los términos de un determinante de orden n son inferiores o a lo sumo iguales a M, puede afirmarse que el módulo del determinante no pasa de:

$$H_n = M^n \sqrt{n^n}.$$

En el caso que $n = 2$ la verificación del teorema es inmediata. En seguida, cuando $n = 3$ y haciendo $r = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ es fácil comprobar que el módulo de

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & r^2 \\ 1 & r^2 & r \end{vmatrix}.$$

es exactamente $\sqrt{3^3}$. Así ocurre que, para un n general y admitiendo valores complejos para los términos del determinante, la cota indicada por Hadamard es inmejorable, por existir ejemplos de determinantes que alcanzan el valor $H_n$. Resulta, sin embargo, que esos determinantes extremos no son, en general, de elementos reales, de modo que las cotas $H_n$ podrán ser rebajadas desde el momento que los términos se limitan al cuerpo *real*.

Por ser un determinante función lineal homogénea de cada una de sus líneas bastará, evidentemente, considerar el caso $M = 1$. Por lo tanto formularé el problema siguiente. El determinante de orden n de términos $x_{pq}$ que satisfacen

$-1 \leq x_{pq} \leq 1$, que es una función continua de estas variables, posee un máximo $E_n$. Pido determinar este máximo en función de n.

Puedo entregar, desde luego, la siguiente lista de valores que corresponden a los órdenes más pequeños:

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_n$ | 1 | 2 | 4 | 16 | 48 | 160 | $\geq$ 576 | 4096 |
| $H_n$ | 1 | 2 | 5,2 | 16 | 55,9 | 216 | 907,5 | 4096 |
| $E_n : H_n$ | 1,00 | 1,00 | 0,77 | 1,00 | 0,86 | 0,74 | $\geq$ 0,63 | 1,00 |

A fin de instigar a otros a preocuparse del problema que acabo de formular daré todavía algunas indicaciones útiles en su tratamiento:

1) La primera mirada a la lista ya enseña que tenemos $E_n = H_n$ en los casos $n = 2^k$. Queda este fenómeno general suficientemente explicado por el determinante de términos reales $\pm 1$ y de módulo $E_8 = H_8$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

2) Como el determinante $|x_{pq}|$ es función lineal de cada una de sus variables vemos que asumirá su máximo en uno de los extremos $x_{pq} = \pm 1$, de modo que bastará encontrar el mayor valor entre los determinantes de elementos $\pm 1$. Aun puede suponerse, en la búsqueda del máximo, que el primer renglón y la primera columna del determinante conste de puros $x_{pq} = +1$, puesto que a esta situación puede llegarse multiplicando por $-1$ las líneas y columnas que lo necesiten, e intercambiando, eventualmente, dos líneas para darle signo positivo al determinante. Así, para $n = 3$, el determinante máximo se halla seguramente entre los siguientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \pm 1 & \pm 1 \\ 1 & \pm 1 & \pm 1 \end{vmatrix}$$

La tarea es de escoger el mayor entre este número finito de determinantes, tarea finita también. Para $n = 3$ se trataría de la comparación de $2^4 = 16$ casos; pero, ya para $n = 5$ ¡sería preciso considerar así $2^{16} = 65536$ casos!

3) Es posible otra simplificación más que explicaré a continuación. Restando la primera línea de las demás se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \pm 1 - 1 & \dots & \pm 1 - 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \pm 1 - 1 & & \pm 1 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pm 1 - 1 & \dots & \pm 1 - 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \pm 1 - 1 & \dots & \pm 1 - 1 \end{vmatrix}$$

Los términos del último determinante son todos de valor 0 ó $-2$, y es importante cerciorarse de que todo determinante de términos 0, $-2$ y de orden $n-1$ puede obtenerse de esta manera partiendo de alguno de elementos $\pm 1$ y de orden n. Llamando $D_{n-1}$ el máximo de un determinante de términos 0, 1 y de orden $n-1$ deducimos de lo expuesto que:

$$E_n = 2^{n-1} D_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Pues bien, la determinación de $D_n$ es, en general, menos laboriosa, puesto que la aparición de ceros en un determinante facilita su evaluación. En el caso antes mencionado de la determinación de $E_3$ bastaría calcular $D_2$ como módulo mayor de entre los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

El segundo y el cuarto realizan $D_2 = 1$, con lo que $E_3 = 2^2 \cdot 1 = 4$.

4) Es esencialmente de este método elemental que me he valido para determinar los primeros $D_n$. Aquí van tabulados:

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D_n$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | $\geq 9$ | 32 | $\geq 45$ | $\geq 95$ | $\geq 160$ |

Pueden descartarse, en la discusión un tanto ardua de los muchos casos, aquellos determinantes que según teoremas generales se anulan (en el caso $n = 3$ son todos los cuatro determinantes que quedaban), y aquellos de módulo evidentemente $\leq D_{n-1}$, por la obvia desigualdad $D_n \geq D_{n-1}$. Por otra parte se desprende la desigualdad $D_{n+m} \geq D_n D_m$ (que comprende la anterior) del esquema de fácil explicación:

$$\left| \begin{array}{c|c} D_n & 0 \\ \hline 0 & D_m \end{array} \right|$$

en que $D_n$, $D_m$ simbolizan determinantes del orden y valor indicado. De este modo se obtuvo, por ejemplo, la relación $D_{12} \geq D_5 D_7 = 160$.

Ademas tenemos, para $n = 2^k - 1$, según lo observado en 1):

$$D_n = H_{n+1} : 2^n = 2^{(k-2)2^{k-1}+1}$$

Finalmente, tendré que revelar que he obtenido las cotas inferiores para $D_6$, $D_8$ y $D_9$ del cálculo de los determinantes siguientes:

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix}
\quad
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix}
\quad
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

Son estos determinantes del tipo llamado cíclico, tipo cuya teoría (creada por Spottiswoode, Crelles Journal 1856, y Stern, Crelles Journal 1871) me ha servido en la selección de estos ejemplos. Observo que los determinantes de módulo $D_n$:

$$
|1| \qquad
\begin{vmatrix}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{vmatrix}
\qquad
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1
\end{vmatrix}
\qquad
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1
\end{vmatrix}
$$

son igualmente determinantes cíclicos, mientras que:

$$
\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{vmatrix}
= 5 = D_5
$$

no es cíclico ni existe determinante cíclico que realice $D_5$.

Para terminar recomiendo al lector interesado que verifique mi determinación de $D_4$, $D_5$ y $D_6$. ¿Podría esperarse la obtención de algún resultado general?